TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 323, Number 1, January 1991

# STRUCTURE LOCALE DE L'ESPACE DES RÉTRACTIONS D'UNE SURFACE

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. Let $\Sigma$ be a compact connected 2-manifold, and $\mathscr{R}(\Sigma)$ the space of retractions of $\Sigma$. We prove that $\mathscr{R}(\Sigma)$ is an $l^2$-manifold if the boundary of $\Sigma$ is not empty, and is the union of an $l^2$-manifold and an isolated point $\mathrm{id}_\Sigma$ if $\Sigma$ is closed.

## INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit $X$ un espace métrique compact. Une rétraction de $X$ est une fonction continue $r$ de $X$ dans $X$ telle que $r \circ r = r$. L'espace $\mathscr{R}(X)$ des rétractions de $X$ fut introduit par K. Borsuk [2] qui montra que, même quand $X$ est un rétracte absolu, $\mathscr{R}(X)$ peut ne pas être localement connexe. Peu de choses sont connues sur la structure locale de $\mathscr{R}(X)$ quand $X$ est une variété topologique. Dans [5], T. A. Chapman prouva que, si $X$ est une $Q$-variété compacte, alors $\mathscr{R}(X)$ est un rétracte absolu de voisinage; ce résultat fut complété par K. Sakai [13] qui montra que, dans ce cas, $\mathscr{R}(X)$ est une $l^2$-variété. Boxer [3] montra que, si $X$ est une surface, $\mathscr{R}(X)$ est localement connexe. Si $I$ est un arc, $\mathscr{R}(I)$ est homéomorphe à $l^2$ ; ce résultat fut prouvé par Basmanov et Savchenko [1] qui demandérent s'il pouvait s'étendre à l'espace des rétractions d'une $n$-boule. Le théorème suivant, que nous allons démontrer dans cet article, élucide complètement la structure locale de $\mathscr{R}(\Sigma)$ quand $\Sigma$ est une surface compacte.

**Théorème.** *Soit $\Sigma$ une surface compacte connexe. Alors*

(i) *Si le bord de $\Sigma$ n'est pas vide, $\mathscr{R}(\Sigma)$ est une $l^2$-variété.*
(ii) *Si le bord de $\Sigma$ est vide, $\mathscr{R}(\Sigma)$ est la réunion d'une $l^2$-variété et d'un point isolé* id.

Il est possible d'identifier $\Sigma$ à un sous-espace de $\mathscr{R}(\Sigma)$ en associant à chaque point de $\Sigma$ la rétraction de $\Sigma$ sur ce point. Il fut démontré indépendamment par Wagner [18] et l'auteur [4] que la composante connexe $\mathscr{L}(\Sigma)$ de $\mathscr{R}(\Sigma)$ qui contient $\Sigma$ a le type d'homotopie de $\Sigma$. Puisque les $l^2$-variétés sont déterminées topologiquement par leur type d'homotopie [9], il résulte du théorème précédent que $\mathscr{L}(\Sigma)$ est homéomorphe à $\Sigma \times l^2$.

Received by the editors July 1, 1988 and, in revised form, January 18, 1989.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 54C15, 54C55, 57N05, 57N20.

Etant donnés des espaces topologiques $X$ et $Y$, nous notons $\mathscr{C}(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de $X$ dans $Y$ avec la topologie compacte-ouverte; si $X = Y$, nous écrivons simplement $\mathscr{C}(X)$ au lieu de $\mathscr{C}(X, X)$. Si $X, Y, Z$ sont trois espaces métrisables, on obtient une bijection de $\mathscr{C}(X \times Y, Z)$ sur $\mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y, Z))$ en associant à la fonction $h$ de $\mathscr{C}(X \times Y, Z)$ la fonction $\overline{h}$ de $\mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y, Z))$ définie par $\overline{h}(x)(y) = h(x, y)$ (voir [6, p. 261]). Si $h$ est une fonction de $X \times Y$ dans $Z$ et $x$ (resp. $y$) un point de $X$ (resp. $Y$), nous notons $h_x$ (resp. $h_y$) la fonction de $Y$ (resp. $X$) dans $Z$ définie par $h_x(y) = h(x, y)$ (resp. $h_y(x) = h(x, y)$). Si $k$ est une fonction de $X$ dans $\mathscr{C}(Y, Z)$, nous notons indifféremment $k(x)$ ou $k_x$ l'image de $x$ par $k$ dans $\mathscr{C}(Y, Z)$. Il est connu que si $X$ et $Y$ sont métrisables et $X$ compact, une suite $\{f_n\}$ converge vers $f$ dans $\mathscr{C}(X, Y)$ si, et seulement si, pour tout point $x$ de $X$ et toute suite $\{x_n\}$ de points de $X$ convergeant vers $x$, la suite $\{f_n(x_n)\}$ converge vers $f(x)$. Si $X$ est un espace métrique compact, l'ensemble $\mathscr{R}(X)$ des rétractions de $X$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(X)$; il est donc séparable et topologiquement complet.

Si $\Sigma$ est une surface compacte, nous notons $\partial\Sigma$ son bord et $\mathring{\Sigma}$ son intérieur. Nous notons $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$ l'ensemble des rétractions $r$ de $\mathscr{R}(\Sigma)$ telles que $r(\Sigma) \cap \partial\Sigma = \varnothing$; c'est évidemment un ouvert de $\mathscr{R}(\Sigma)$, et $\mathscr{R}^\circ(\Sigma) = \mathscr{R}(\Sigma)$ si $\partial\Sigma$ est vide. Nous notons $\mathscr{D}(\Sigma)$ l'ensemble des rétractions $r$ qui sont des équivalences homotopiques de $\Sigma$ dans $\Sigma$ (ou, ce qui revient au même, telles que $r(\Sigma)$ soit un rétracte par déformation de $\Sigma$); c'est un ouvert de $\mathscr{R}(\Sigma)$ (car, $\Sigma$ étant un rétracte absolu de voisinage, deux éléments suffisamment proches de $\mathscr{C}(\Sigma)$ sont homotopes). Posons enfin $\mathscr{D}^\circ(\Sigma) = \mathscr{D}(\Sigma) \cap \mathscr{R}^\circ(\Sigma)$. L'image d'une rétraction $r$ de $\mathscr{R}(\Sigma)$ sera notée tantôt $r(\Sigma)$, tantôt $\operatorname{im}(r)$.

Si $A$ est un sous-ensemble d'un espace topologique, sa fermeture sera notée $\overline{A}$, sa frontière $\operatorname{Fr}(A)$, et son intérieur $\mathring{A}$ ou $\operatorname{Int}(A)$. La restriction à $A$ d'une fonction $f$ sera notée $f|A$. La fonction identité sur $A$ sera notée tantôt id, tantôt $1_A$. Si $d$ est une distance sur $X$ et $A, B$ des sous-ensembles de $X$, nous noterons resp. $\delta(A)$ et $d(A, B)$ le diamètre de $A$ et la distance entre les sous-ensembles $A$ et $B$; si $A$ est réduit à un point $x$, nous écrirons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$.

L'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$ sera noté $I$.

## 2. Démonstration du théorème

Puisque $\Sigma$ est un rétracte absolu de voisinage, tout élément de $\mathscr{C}(\Sigma)$ suffisamment proche de $1_\Sigma$ est homotope à $1_\Sigma$. Si le bord de $\Sigma$ est vide, le groupe d'homologie de Čech à coefficients $\mathbf{Z}_2$, $\check{H}_2(\Sigma, \mathbf{Z}_2)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_2$ tandis que $\check{H}_2(A, \mathbf{Z}_2) = 0$ pour tout sous-ensemble fermé propre de $\Sigma$, ce qui entraîne qu'aucune rétraction autre que $1_\Sigma$ ne peut induire l'identité sur $\check{H}_2(\Sigma, \mathbf{Z}_2)$, donc, a fortiori, être homotope à $1_\Sigma$. Il en résulte que $1_\Sigma$ est un point isolé de $\mathscr{R}(\Sigma)$ quand $\partial\Sigma$ est vide.

**Lemme 1.** *Soit* $\Sigma$ *une surface compacte. Il existe une déformation* $\varphi\colon \mathscr{R}(\Sigma) \times I \to \mathscr{R}(\Sigma)$ *vérifiant*

(i) $\varphi_0 = \mathrm{id}$,

(ii) *pour* $t > 0$, *la fermeture de* $\varphi_t(\mathscr{R}(\Sigma))$ *est contenue dans* $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$.

Ce lemme est essentiellement la remarque (1.2) de [16]. La condition (ii) résulte de ce que, pour un collier $\partial\Sigma \times [0, 2]$ du bord de $\Sigma$, $\varphi_t(\mathscr{R}(\Sigma))$ est formé de rétractions dont les images sont contenues dans $\Sigma \backslash \partial\Sigma \times [0, t[$.

Une conséquence importante du Lemme 1 est que la théorème sera démontré si nous prouvons que $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$ (ou $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)\backslash\{1_\Sigma\}$ si $\partial\Sigma$ est vide) est une $l^2$-variété. En effet, il résulte facilement de ce lemme et de [10, Théorème 6.3, pp. 139–140] que $\mathscr{R}(\Sigma)$ est un rétracte absolu de voisinage si $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$ en est un; l'affirmation découle alors d'un théorème de Toruńczyk [15, Théorème B.1].

**Lemme 2.** *Soient* $X$ *un rétracte absolu de voisinage compact,* $Y$ *un espace métrique,* $A$ *un fermé de* $Y$ *et* $f\colon A \to \mathscr{R}(X)$ *une fonction continue. Supposons qu'il existe un voisinage* $V$ *de* $A$ *dans* $Y$ *et une fonction continue* $\varphi\colon V \to \mathscr{R}(X)$ *vérifiant*

$$\mathrm{im}(\varphi_y) = \mathrm{im}(f_y) \quad \textit{pour tout } y \textit{ dans } A.$$

*Alors, il existe un voisinage* $W$ *de* $A$ *dans* $Y$ *et une fonction continue* $g\colon W \to \mathscr{R}(X)$ *qui prolonge* $f$.

*Démonstration.* Définissons le sous-ensemble $C$ de $V \times X$ par

$$C = \bigcup_{y \in V} \{y\} \times \varphi_y(X).$$

$C$ est fermé dans $V \times X$ car, si $(y_n, x_n)$ est une suite de points de $C$ convergeant vers $(y, x)$, il existe des $z_n$ dans $X$ tels que $x_n = \varphi_{y_n}(z_n)$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $z_n$ tend vers $z$; alors $(y_n, z_n)$ tend vers $(y, z)$ donc, par continuité, $x_n = \varphi_{y_n}(z_n)$ tend vers $\varphi_y(z)$, d'où $x = \varphi_y(z)$.

Définissons $h\colon C \cup (A \times X) \to X$ par

$$h(y, x) = \begin{cases} x & \text{si } (y, x) \in C, \\ f_y(x) & \text{si } (y, x) \in A \times X. \end{cases}$$

Cette définition a un sens car, si $(y, x)$ appartient à $C \cap (A \times X)$, alors $y$ appartient à $A$ et $x$ à $\varphi_y(X) = f_y(X)$, donc $f_y(x) = x$. Puisque $C$ et $A \times X$ sont fermés dans $V \times X$, $h$ est continue. Puisque $X$ est un rétracte absolu de voisinage, il y a un ouvert $O$ de $V \times X$ contenant $C \cup (A \times X)$ et une fonction continue $k$ de $O$ dans $X$ prolongeant $h$. La compacité de $X$ permet de trouver un voisinage $W$ de $A$ dans $y$ tel que $W \times X$ soit contenu dans $O$. Soit $l = k | W \times X$. Définissons alors $g\colon W \to \mathscr{C}(X)$ par $g_y = \varphi_y \circ l_y$.

Pour tout $y$ dans $W$, $l_y(X)$ contient $l(\{y\} \times \varphi_y(X)) = h(\{y\} \times \varphi_y(X)) = \varphi_y(X)$. Puisque $\varphi_y$ est une rétraction sur $\varphi_y(X)$, nous avons donc $\varphi_y \circ l_y(X) = \varphi_y(X)$. De plus, si $x$ appartient à $\varphi_y(X)$, $g_y(x) = \varphi_y(l(y, x)) = \varphi_y(h(y, x)) = \varphi_y(x) = x$, ce qui montre que $g_y$ est une rétraction de $X$ sur

$\varphi_y(X)$. La fonction $g$ est donc à valeurs dans $\mathscr{R}(X)$. Pour $y$ dans $A$, nous avons

$$g_y(x) = \varphi_y(l(y, x)) = \varphi_y(h(y, x)) = \varphi_y(f_y(x)) = f_y(x),$$

puisque $f_y(x)$ appartient à l'image $\operatorname{im}(\varphi_y) = \operatorname{im}(f_y)$ de la rétraction $\varphi_y$. Ceci montre que $g: W \to \mathscr{R}(X)$ prolonge $f$.

**Lemme 3.** *Soient $N$ une surface compacte connexe à bord non vide, $X$ un espace métrique, $A$ un fermé de $X$ et $f: A \to \mathscr{D}^\circ(N)$ une fonction continue. Alors, il existe un voisinage $V$ de $A$ dans $X$ et une fonction continue $\varphi: V \to \mathscr{D}^\circ(N)$ telle que* $\operatorname{im}(\varphi_x) = \operatorname{im}(f_x)$ *pour tout $x$ dans $A$.*

Ce lemme sera prouvé plus loin.

Soit $N$ une sous-variété à bord non vide de $\Sigma$ qui en est un rétracte. Soit $Q(N)$, ou simplement $Q$, le sous-ensemble de $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$ formé des rétractions $\rho$ telles que $\rho(\Sigma) \subset \mathring{N}$ et que la restriction de $\rho$ à $N$ appartiennent à $\mathscr{D}^\circ(N)$. Il est facile de voir que $Q$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$, et il résulte immédiatement du Lemme 5.3 de [18] que tout élément de $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$, autre que $1_\Sigma$ quand $\Sigma$ est fermée, a dans $\mathscr{R}^\circ(\Sigma)$ un voisinage de la forme $Q(N)$. Il suffit donc pour achever la démonstration du théorème, de montrer que $Q$ est une $l^2$-variété.

**Lemme 4.** *$Q$ est un rétracte absolu de voisinage.*

*Démonstration.* Soient $X$ un espace métrique, $A$ un fermé de $X$ et $f: A \to Q$ une fonction continue. Définissons $g: A \to \mathscr{D}^\circ(N)$ par $g_x = f_x|N$. D'après les Lemmes 2 et 3, il y a un voisinage $V$ de $A$ dans $X$ et une fonction $G: V \to \mathscr{R}(N)$ prolongeant $g$. Puisque $\mathscr{D}^\circ(N)$ est ouvert dans $\mathscr{R}(N)$, nous pouvons supposer, quitte à restreindre $V$, que $G$ prend ses valeurs dans $\mathscr{D}^\circ(N)$. Définissons alors une fonction $h$ de $(V \times N) \cup (A \times \Sigma)$ dans $\mathring{N}$ par

$$h(x, m) = \begin{cases} G_x(m) & \text{si } (x, m) \in V \times N, \\ f_x(m) & \text{si } (x, m) \in A \times \Sigma. \end{cases}$$

Cette définition a un sens puisque, si $(x, m)$ appartient à $A \times N$, alors $G_x(m) = g_x(m) = f_x(m)$. Puisque $(V \times N) \cup (A \times \Sigma)$ est fermé dans $V \times \Sigma$ et que $\mathring{N}$ est un rétracte absolu de voisinage, $h$ a un prolongement $H$ à un voisinage $P$ de $(V \times N) \cup (A \times \Sigma)$ dans $V \times \Sigma$. Puisque $\Sigma$ est compacte, nous pouvons trouver un voisinage $W$ de $A$ tel que $P$ contienne $W \times \Sigma$. Nous obtenons alors une fonction continue $k$ de $W$ dans $\mathscr{C}(\Sigma, N)$ en posant $k_x = H_x$ pour $x$ dans $W$. Définissons enfin $F: W \to \mathscr{C}(\Sigma)$ par

$$F_x = j \circ G_x \circ k_x,$$

où $j$ est l'inclusion de $N$ dans $\Sigma$.

Si $x$ appartient à $A$ et $m$ à $\Sigma$, $F_x(m) = (j \circ G_x)(k_x(m)) = (j \circ g_x)(f_x(m)) = f_x(m)$ puisque $j \circ g_x|\operatorname{im}(f_x) = f_x|\operatorname{im}(f_x) = \mathrm{id}$, donc $F$ prolonge $f$. Soit

$x$ un point de $W$ ; par définition de $F$, $\mathrm{im}(F_x)$ est contenue dans $\mathrm{im}(G_x)$ ; de plus, si $m$ appartient à $\mathrm{im}(G_x)$, $k_x(m) = H_x(m) = G_x(m) = m$, d'où $F_x(m) = m$. Ceci montre que $F_x$ est une rétraction de $\Sigma$ sur $\mathrm{im}(G_x) \subset \mathring{N}$. De plus, $F_x|N = G_x$ appartient à $\mathscr{D}^\circ(N)$, donc $F_x$ appartient à $Q$. $F$ est donc une fonction de $W$ dans $Q$ prolongeant $f$, d'où le résultat.

**Lemme 5.** *$Q(N)$ est une $l^2$-variété.*

Le cas où $N$ est un disque présente une difficulté particulière et sera traité plus loin.

*Démonstration du Lemme 5 quand $N$ n'est pas un disque.* Nous dirons qu'un espace $X$ est divisible par $l^2$ s'il existe un espace $Y$ tel que $Y \times l^2$ soit homéomorphe à $X$. Il est connu qu'un rétracte absolu de voisinage séparable, topologiquement complet et divisible par $l^2$ est une $l^2$-variété (ceci résulte de la Proposition 4.5 de [14] et du fait que $l^2$ est homéomorphe à $l^2 \times l^2$). Puisque $Q$ est un ouvert de l'espace séparable et topologiquement complet $\mathscr{R}(\Sigma)$, il est séparable et topologiquement complet. D'après le Lemma 4, c'est un rétracte absolu de voisinage. Il suffit donc de prouver que tout point de $Q$ a un voisinage ouvert divisible par $l^2$.

Nous utiliserons des résultats de Geoghegan [8]. Soit $M_0(I)$ l'espace des surjections croissantes de $I$ sur lui-même. Soient $A$, $T$ deux espaces métriques et $U$ un ouvert non vide relativement compact de $A$ tel que, notant $C(\mathrm{Fr}(U))$ le cône sur $\mathrm{Fr}(U)$, les paires $(\overline{U}, \mathrm{Fr}(U))$ et $(C(\mathrm{Fr}(U)), \mathrm{Fr}(U))$ soient homéomorphes. Soit $E$ un sous-ensemble de $\mathscr{C}(A, T)$ vérifiant

(i) Pour tout $f$ dans $E$, $f|\overline{U}$ n'est pas constante.
(ii) Si $f$ appartient à $E$ et si $h \in \mathscr{C}(A, T)$ vérifie $h|A\backslash U = f|A\backslash U$ et $h(\overline{U}) = f(\overline{U})$, alors $h$ appartient à $E$.

Alors, $E$ est divisible par $M_0(I)$ ([8, Théorème 2.5]; l'énoncé de ce théorème n'est pas aussi général, mais sa démonstration prouve ce résultat). De plus, $M_0(I)$ est homéomorphe à $l^2$ [8, Théorème 3.4], donc $E$ est divisible par $l^2$.

Soit $r$ un élément de $Q$. La restriction de $r$ à $\Sigma\backslash\mathrm{im}(r)$ ne peut être localement constante car sinon, si $K$ est une composante de $\Sigma\backslash\mathrm{im}(r)$, $r(K)$ serait réduit à un point, donc aussi $r(\overline{K})$ et, à fortiori, $r(\mathrm{Fr}(K))$. Mais $\mathrm{Fr}(K)$ est contenue dans $\mathrm{im}(r)$, et $r$ est l'identité sur $\mathrm{Fr}(K)$, donc $\mathrm{Fr}(K)$ serait réduite à un point $x$. Puisque un point ne peut disconnecter une surface, $\overline{K}$ serait égal à $\Sigma$, et $r$ serait la rétraction constante sur $x$. Mais ceci est impossible puisque, pour $r$ dans $Q$, $\mathrm{im}(r)$ a le type d'homotopie de $N$ et que $N$ n'est pas un disque. Nous pouvons donc trouver un point $a$ de $\Sigma\backslash\mathrm{im}(r)$ tel que, pour tout voisinage $W$ de $a$, $r|W$ ne soit pas constante. Soit $U$ un voisinage de a homéomorphe à un disque ouvert et dont la fermeture est disjointe de $\mathrm{im}(r)$. Soit $E$ l'ensemble des rétractions $\rho \in Q$ vérifiant

(1) $\overline{U} \cap \mathrm{im}(\rho) = \varnothing$,
(2) $\rho(U)$ contient plus d'un point.

Il est clair que $E$ est ouvert dans $Q$ et, d'après le choix de $a$ et $U$, il contient $r$. La condition (i) ci-dessus n'est autre que (2). Soit $\rho$ dans $E$ et soit $\rho'$ dans $\mathscr{C}(\Sigma)$ telle que $\rho'|\Sigma\backslash U = \rho|\Sigma\backslash U$ et $\rho'(\overline{U}) = \rho(\overline{U})$. Alors $\rho'(\Sigma) = \rho(\Sigma)$, donc $\rho'$ vérifie (1) et $\rho'|\rho(\Sigma) = \rho|\rho(\Sigma) = \mathrm{id}$, donc $\rho'$ est une rétraction de $\Sigma$ sur $\mathrm{im}(\rho)$. Puisque $\mathrm{im}(\rho) \subset \overset{\circ}{N}$ est un rétracte par déformation de $N$, $\rho'$ appartient à $Q$. Puisque $\rho'(\overline{U}) = \rho(\overline{U})$ et que $\rho$ vérifie (2), $\rho'(U)$ ne peut être réduit à un point, donc $\rho'$ vérifie (2). Par conséquent, $\rho'$ appartient à $E$, et $E$ vérifie la condition (ii); il est donc divisible par $l^2$ d'après les résultats de Geoghegan, d'où le lemme.

Ceci achève de prouver le théorème, sous réserve de vérification du Lemme 3 et du cas particulier du Lemme 5 où $N$ est un disque.

## 3. Démonstration du Lemme 3 quand $N$ n'est pas un disque

Dans cette section, $N$ est une surface compacte connexe à bord non vide qui n'est pas un disque; soient $C_1, \ldots, C_m$ les composantes de $\partial N$. Soit $M = N \cup (\bigcup_{i=1}^m D_i)$ la surface fermée obtenue en ajoutant à $N$ des disques fermés deux à deux disjoints $D_i$ de façon que $D_i \cap N = \partial D_i = C_i$.

**Lemme 6.** *Si $r$ est un élément de $\mathscr{D}^\circ(N)$, $M\backslash\mathrm{im}(r)$ a $m$ composantes; chacune d'elles contient exactement l'un des $D_i$ et est simplement connexe.*

Ceci est la deuxième partie du Théorème (3.4) de [18].

Notons $B$ le disque unité du plan complexe $\mathbf{C}$. Pour $0 \le t \le 1$, notons $B_t$ le disque de centre 0 et de rayon $t$ dans $\mathbf{C}$ et $R_t = B\backslash\overset{\circ}{B}_t$. Pour $0 < t \le 1$, soit $s_t$ la rétraction radiale de $B\backslash\{0\}$ sur $R_t$; $s_t$ dépend continuement de $t$. A l'occasion, nous écrirons aussi $s$ au lieu de $s_1$.

**Lemme 7.** *Soient $X$ un espace métrique, $A$ un fermé de $X$ et $f: A \to \mathscr{D}^0(N)$ une fonction continue. Alors, il existe un voisinage $V$ de $A$ dans $X$ et des fonctions continues $\psi^i: V \to \mathscr{C}(B, M)$, $1 \le i \le m$, vérifiant*

(i) *pour tout $x$ dans $V$ et $1 \le i \le m$, la restriction de $\psi^i_x$ à $\overset{\circ}{B}$ est un homéomorphisme de $\overset{\circ}{B}$ sur $\psi^i_x(\overset{\circ}{B})$,*

(ii) *pour tout $x$ dans $V$, $\psi^i_x(\overset{\circ}{B}) \cap \psi^j_x(\overset{\circ}{B}) = \varnothing$ si $i \neq j$,*

(iii) *pour tout $x$ dans $V$ et $1 \le i \le m$, $\psi^i_x(0) \in \overset{\circ}{D}_i$,*

(iv) *si $x$ appartient à $A$, alors $\psi^i_x(\overset{\circ}{B})$ est la composante de $M\backslash\mathrm{im}(f_x)$ qui contient $D_i$, $1 \le i \le m$.*

Ce lemme sera prouvé dans la section suivante. Montrons qu'il implique le Lemme 3.

*Démonstration du Lemme 3 quand $N$ n'est pas un disque.* Il résulte de (iv) que nous pouvons restreindre $V$ de façon que, pour tout point $x$ de $V$ et $1 \le i \le m$, $\psi^i_x(\partial B)$ soit contenu dans $\overset{\circ}{N}$.

Définissons alors, pour $x$ dans $V$, la fonction $\varphi_x$ sur $N$ par

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \notin \bigcup_{i=1}^m \psi_x^i(\overset{\circ}{B}), \\ \psi_x^i \circ s \circ (\psi_x^i)^{-1}(y) & \text{si } y \in \psi_x^i(\overset{\circ}{B}), \ 1 \le i \le m. \end{cases}$$

La condition (ii) garantit que cette définition a un sens. Pour montrer que $\varphi_x$ est continue et que la fonction $\varphi\colon V \to \mathscr{C}(N)$ est continue, il suffit de vérifier que, si $\{x_n\}$ est une suite de points de $V$ convergeant vers $x$ et $\{y_n\}$ une suite de points de $N$ tendant vers $y$, la suite $\{\varphi_{x_n}(y_n)\}$ a une sous-suite convergeant vers $\varphi_x(y)$ car, en appliquant ceci à une sous-suite arbitraire de la suite $\{\varphi_{x_n}(y_n)\}$, cela entraîne que la suite $\{\varphi_{x_n}(y_n)\}$ converge vers $\varphi_x(y)$. Distinguons deux cas:

*1er cas.* Il existe un $i$ tel que $y$ appartienne à $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$. Soit $E$ un disque contenu dans $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$ et dont l'intérieur contient $y$; pour $n$ assez grand, $y_n$ est dans $E$. D'après (i) et la continuité de $\psi^i$, si $x_n$ est assez proche de $x$, $E$ est contenu dans $\psi_{x_n}^i(\overset{\circ}{B})$. La convergence uniforme de $\psi_{x_n}^i$ vers $\psi_x^i$ entraîne la convergence uniforme de la restriction de $(\psi_{x_n}^i)^{-1}$ à $E$ vers la restriction de $(\psi_x^i)^{-1}$ à $E$. Par suite, $(\psi_{x_n}^i)^{-1}(y_n)$ tend vers $(\psi_x^i)^{-1}(y)$, donc $s \circ (\psi_{x_n}^i)^{-1}(y_n)$ tend vers $s \circ (\psi_x^i)^{-1}(y)$ et $\varphi_{x_n}(y_n)$ tend vers $\varphi_x(y)$.

*2ème cas.* $y$ appartient à $N \setminus \bigcup_{i=1}^m \psi_x^i(\overset{\circ}{B})$. Si, pour une infinité d'indices $n$, $y_n$ n'appartient pas à $\bigcup_{i=1}^m \psi_{x_n}^i(\overset{\circ}{B})$, le résultat est évident. Sinon, nous pouvons supposer que, pour un certain $i$, tous les $y_n$ sont dans $\psi_{x_n}^i(\overset{\circ}{B})$. Posons $w_n = (\psi_{x_n}^i)^{-1}(y_n)$. Nous pouvons supposer que $\{w_n\}$ converge vers un point $w$ de $B$. Puisque $y_n = \psi_{x_n}^i(w_n)$ tend vers $y$ qui n'appartient pas à $\psi_x^i(\overset{\circ}{B})$, $w$ appartient à $\partial B$. Alors, les suites $\{s(w_n)\}$ et $\{w_n\}$ ont la même limite $w$, donc la suite $\varphi_{x_n}(y_n) = \psi_{x_n}^i \circ s(w_n)$ a la même limite que la suite $\psi_{x_n}^i(w_n) = y_n$, soit $y$, d'où le résultat.

D'après sa définition, il est clair que $\varphi_x$ est une rétraction de $N$ sur $N \setminus \bigcup_{i=1}^m \psi_x^i(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{N}$, donc $\varphi$ est une fonction continue de $V$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$. D'après (iv), si $x$ est dans $A$, $\operatorname{im}(\varphi_x) = \operatorname{im}(f_x)$, donc $\varphi_x$ est dans $\mathscr{D}^\circ(N)$ pour $x$ dans $A$; $\mathscr{D}^\circ(N)$ étant ouvert dans $\mathscr{R}^\circ(N)$, nous pouvons supposer, en restreignant $V$, que $\varphi$ prend ses valeurs dans $\mathscr{D}^\circ(N)$, d'où le Lemme 3.

## 4. Démonstration du Lemme 7

Dans cette section, $N$ est une surface compacte connexe à bord non vide qui n'est pas un disque. Nous conservons les notations de la section précédente. Soit $\pi\colon \hat{M} \to M$ le revêtement universel de $M$; $\hat{M}$ est homéomorphe à la sphère ou au plan. Soit $r$ dans $\mathscr{D}^\circ(N)$; pour $1 \le i \le m$, soit $G_i$ la composante de

$M\backslash\mathrm{im}(r)$ qui contient $D_i$. Puisque $G_i$ est simplement connexe, la restriction de $\pi$ à chaque composante de $\pi^{-1}(G_i)$ est un homéomorphisme. Avec ces notations, nous pouvons énoncer le

**Lemme 8.** *Chaque composante connexe de $\pi^{-1}(G_i)$ est relativement compacte dans $\hat{M}$.*

*Démonstration.* Supposons au contraire que la composante $H$ de $\pi^{-1}(G_i)$ ne soit pas relativement compacte. Alors $\hat{M}$ est homéomorphe au plan et $H$ contient une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendant vers l'infini. Posons $y_n = \pi(x_n)$; nous pouvons supposer que $\{y_n\}$ converge vers un point $y$ de $\mathrm{Fr}(G_i)$.

Puisque $\mathrm{im}(r)$ est localement connexe, $\mathrm{Fr}(G_i)$ l'est aussi. (Pour les continus plans, ceci est le théorème de Torhorst [19, p. 106]. Si $p$ est un point de $\mathrm{Fr}(G_i)$ et $P_0$, $P_1$, $P_2$ des disques tels que $p \in \mathring{P}_0$ et $P_j \subset \mathring{P}_{j+1}$ pour $j = 0, 1$, le Théorème (4.4), p. 113 de [19], appliqué au continu plan localement connexe $(\mathrm{im}(r) \cap P_2) \cup (P_2\backslash\mathring{P}_1)$ assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes de $G_i \cap \mathring{P}_1$ dont les fermetures rencontrent $P_0$. L'application du théorème de Torhorst à chacune d'elles donne la connexité locale de $\mathrm{Fr}(G_i)$ en $p$.) Soient $E_1$, $E_2$, $E_3$ des disques de $M$ vérifiaint

(1) $y \in \mathring{E}_1$,
(2) $E_j \subset \mathring{E}_{j+1}$, $j = 1, 2$.

Nous pouvons supposer les $y_n$ contenus dans $\mathring{E}_1$. La restriction de $\pi$ à chaque composante $K$ de $\pi^{-1}(E_3)$ étant un homéomorphisme, $\mathring{K}$ ne peut contenir qu'un nombre fini de points $x_n$; il en résulte que chaque composante connexe de $\mathring{E}_3 \cap G_i$ ne contient qu'un nombre fini de points $\{y_n\}$ (car si $L$ est un arc reliant $y_j$ à $y_k$ dans $G_i$, $L$ a un relèvement unique $\hat{L}$ dans $H$; si $L$ est contenu dans $\mathring{E}_3$ et si $x_j$ appartient à $\mathring{K}$, alors $\hat{L}$ est contenu dans $\mathring{K}$).

Soit $X = E_3 \cap (\mathrm{im}(r) \cup (M\backslash\mathring{E}_2))$; il est facile de voir que $X$ est un sous-continu (si $E_2$ est assez petit) localement connexe de $E_3$. Si $Q$ est une composante de $E_3\backslash X$ qui contient l'un des $y_n$, alors $Q$ rencontre $E_1$ et $\overline{Q}$ rencontre $E_2$ (dès que $E_2$ est assez petit pour que $G_i\backslash E_2 \neq \emptyset$). D'après ce qui précède, il y a une infinité de telles composantes, ce qui contredit le Théorème (4.4), p. 113 de [19].

Pour démontrer le Lemme 7, nous aurons besoin de résultats de la théorie des représentations conformes. Il est connu que, si $H$ est un domaine borné simplement connexe du plan et $p$ un point de $H$, il y a une unique représentation conforme $h$ de $\mathring{B}$ sur $H$ telle que $h(0) = p$ et $h'(0) > 0$. Si la frontière de $H$ est localement connexe, $h$ a un prolongement continu de $B$ sur $\overline{H}$ [7]. La fonction $h$ dépend continuement de $H$ au sens suivant [18, Théorème 2.2]. Soient $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ des domaines bornés simplement connexes du plan contenant un disque fermé fixé $D$; supposons les frontières des $H_n$ localement connexes, et soit $p$ un point de $\mathring{D}$; soit $h_n$ l'unique application continue de $B$ sur $\overline{H}_n$ dont la restriction à $\mathring{B}$ est une représentation conforme sur $H_n$ et qui vérifie $h_n(0) = p$ et $h_n'(0) > 0$. La suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $h_0$ si la condition suivante est vérifiée:

(+) Il existe des rétractions $\rho_n$ de $\mathbf{C}\backslash\mathring{D}$ sur $\mathbf{C}\backslash H_n$ telles que $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $\rho_0$ sur $\mathbf{C}\backslash\mathring{D}$.

*Démonstration du Lemme* 7. Soient $M$, $D_i$ et $\hat{M}$ comme ci-dessus. Pour $1 \leq i \leq m$, soient $E_i$ une composante fixée de $\pi^{-1}(D_i)$ et $p_i$ un point fixé de $\mathring{E}_i$. Pour $x$ dans $A$, les Lemmes 6 et 8 s'appliquent à $\operatorname{im}(f_x)$; soit $G_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, la composante de $M\backslash\operatorname{im}(f_x)$ qui contient $D_i$, et soit $H_i(x)$ la composante de $\pi^{-1}(G_i(x))$ qui contient $E_i$.

A l'aide d'un homéomorphisme fixé, nous identifions $\hat{M}$ au plan complexe $\mathbf{C}$ ou à la sphère de Riemann $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Si $\hat{M} = \mathbf{C}$, $H_i(x)$ est un sous-ensemble borné d'après le Lemme 8; si $\hat{M} = S^2$, l'intérieur de $\hat{M}\backslash H_i(x)$ n'est pas vide (car ou bien $\hat{M} \neq M$, ou bien $m \geq 2$; dans les deux cas, $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^{m} D_i)$ a au moins deux composantes). Nous pouvons donc appliquer les résultats cités de la théorie des représentations conformes (si $\hat{M} = S^2$, la condition $h'(0) > 0$ signifie que $h'(0)$ est un multiple positif d'un vecteur fixé du plan tangent à $S^2$ en $p$).

Pour $x$ dans $A$ et $1 \leq i \leq m$, la frontière de $H_i(x)$ est localement connexe (vérification laissée au lecteur). Notons $h_x^i$ l'unique fonction continue de $B$ sur $\overline{H_i(x)}$ dont la restriction à $\mathring{B}$ est une représentation conforme sur $H_i(x)$ et qui vérifie $h_x^i(0) = p_i$ et $(h_x^i)'(0) > 0$. La fonction $h^i\colon A \to \mathscr{C}(B, \hat{M})$ est continue. En effet, la rétraction $f_x$ étant une équivalence homotopique, se relève en une unique rétraction $\hat{f}_x$ de $\hat{N} = \pi^{-1}(N)$ sur $\pi^{-1}(\operatorname{im}(f_x))$; il est facile de voir que $\hat{f}\colon A \to \mathscr{R}(\hat{N})$ est continue. Nous pouvons alors définir une rétraction $\rho_x$ de $\hat{M}\backslash\mathring{E}_i$ sur $\hat{M}\backslash H_i(x)$ par

$$\rho_x(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \hat{M}\backslash H_i(x), \\ \hat{f}_x(y) & \text{si } y \in \overline{H_i(x)}\backslash\mathring{E}_i. \end{cases}$$

Il est clair que $\rho_x$ dépend continuement de $x$, ce qui entraîne la continuité de $h_i$ d'après ce que nous avons rappelé plus haut.

Le sous-ensemble $\mathscr{A}(B, \mathbf{C})$ de $\mathscr{C}(B, \mathbf{C})$ formé des fonctions dont la restriction à $\mathring{B}$ est une représentation conforme est un rétracte absolu de voisinage [11, Lemme 9]; son sous-ensemble $\mathscr{A}_0(B, \mathbf{C})$ formé des $f$ telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$ en est un rétracte (envoyer $f$ sur

$$\tilde{f}(z) = |f'(0)|(f(z) - f(0))/f'(0)),$$

donc est aussi un rétracte absolu de voisinage. Le sous-ensemble $Z_i$ de $\mathscr{C}(B, \hat{M})$ formé des fonctions $h$ dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme de $\overset{\circ}{B}$ sur $h(\overset{\circ}{B})$, qui vérifient $h(0) = p_i$ et $h'(0) > 0$ et telles que $\hat{M}\backslash h(B)$ ait un intérieur non vide est localement homéomorphe à $\mathscr{A}_0(B, \mathbf{C})$, donc est un rétracte absolu de voisinage. Les fonctions $h^i$ étant à valeurs dans $Z_i$, nous pouvons trouver un voisinage $U$ de $A$ dans $X$ et des fonctions continues $k^i\colon U \to Z_i$ prolongeant $h^i$, $1 \le i \le m$.

Pour $x$ dans $U$ et $1 \le i \le m$, notons $\varepsilon_i(x)$ la borne supérieure des nombres $0 \le t < 1$ vérifiant

(1) Si $p$ est une transformation du revêtement $\pi$ autre que l'identité, alors $p(k^i_x(B_t)) \cap k^i_x(B_t) = \varnothing$,

(2) $\pi \circ k^i_x(B_t) \cap \pi(\bigcup_{j=1, j\neq i}^m k^j_x(B)) = \varnothing$.

Si $x$ appartient à $A$, $\varepsilon_i(x) = 1$ puisque, pour $t < 1$, $\pi(k^i_x(B_t)) = \pi(h^i_x(B_t)) \subset G_i(x)$, que $G_i(x)$ est disjoint des fermés $\overline{G_j(x)}$ pour $j \neq i$ et que la restriction de $\pi$ à $H_i(x)$ est un homéomorphisme. Si, pour un $x$ dans $U$ et un $t$ donné, $k^i_x$ vérifie (1) et (2), alors, pour tout $y$ assez proche de $x$, $k^i_y$ vérifie aussi (1) et (2) pour le même $t$ (c'est clair pour la condition (2), $B_t$ et $B$ étant compacts; pour la condition (1), utiliser le fait que, si $P$ est un voisinage compact de $k^i_x(B_t)$, il n'y a qu'un nombre fini de transformations de revêtement $p$ telles que $p(P) \cap P \neq \varnothing$). Par suite, pour $0 < t < 1$, l'ensemble $W_i(t)$ des points $x$ de $U$ vérifiant $\varepsilon_i(x) > t$ est ouvert dans $U$. Nous pouvons donc trouver des voisinages ouverts $V_k$, $k = 1, 2, \ldots$, de $A$ vérifiant

(3) $\overline{V}_{k+1} \subset V_k$ quel que soit $k$,

(4) $\overline{V}_k \subset W_i(k/k+1)$ pour $1 \le i \le m$ et pour tout $k$,

(5) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V}_k = A$.

En utilisant le lemme d'Urysohn, il est facile de construire une fonction continue $\delta\colon V_1 \to I$ vérifiant

(6) $\delta(x) = 1$ si $x \in A$,

(7) $(k-1)/k \le \delta(x) \le k/(k+1)$ si $x \in \overline{V}_k \backslash V_{k+1}$.

Il en résulte que

(8) Si $x$ appartient à $V_1\backslash A$, alors $\delta(x) < \varepsilon_i(x)$ pour $1 \le i \le m$.

En effet, si $x$ appartient à $\overline{V}_k\backslash V_{k+1}$, $\delta(x) \le k/(k+1) < \varepsilon_i(x)$ d'après (4).

Soit $V = V_1$. Pour $x$ dans $V$ et $1 \le i \le m$, définissons la fonction $\psi^i_x\colon B \to M$ par

$$\psi^i_x(m) = \pi \circ k^i_x(\delta(x)w).$$

La continuité de $\psi^i\colon V \to \mathscr{C}(B, M)$ est claire. Pour $x$ dans $A$, $\delta(x) = 1$, donc $\psi^i_x = \pi \circ h^i_x$ et $\psi^i_x|\overset{\circ}{B}$ est un homéomorphisme de $\overset{\circ}{B}$ sur $G_i(x)$, d'où les conditions (i), (ii) et (iv) dans ce cas. La condition (iii) est vérifiée pour tout $x$

puisque $k_x^i(0) = p_i \in \overset{\circ}{E}_i$. Soit $x$ dans $V\backslash A$; d'après (8) et (1), la restriction de $\pi$ à $k_x^i(B_{\delta(x)})$ est un homéomorphisme, ce qui entraîne la condition (i); la condition (ii) résulte de (8) et (2). Le Lemme 7 est donc démontré.

## 5. Démonstration des Lemmes 3 et 5 quand $N$ est un disque

Quand $N$ est un disque, nous rencontrons deux difficultés supplémentaires. D'une part, l'argument donné à la section 3 pour prouver que $Q$ est localement divisible par $l^2$ ne s'applique pas au voisinage d'une rétraction constante. D'autre part, dans ce cas $\hat{M} = M = S^2$ et il n'existe pas de représentation conforme de $\overset{\circ}{B}$ sur $S^2\backslash\mathrm{im}(f_x)$ quand $\mathrm{im}(f_x)$ est réduite à un point, ce qui nous empêche d'appliquer directement les méthodes de la section précédente. Nous allons devoir faire un long détour pour contourner ces difficultés.

Soit $S^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 | y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ la sphère unité de l'espace euclidien. Nous identifions $N$ à l'hémisphère inférieur de $S^2$, $N = \{y \in S^2/y_3 \leq 0\}$; soit $D = S^2\backslash\overset{\circ}{N}$. Soit $p_0 = (0, 0, 1)$ le pôle nord de $S^2$. Nous supposons $S^2$ munie de sa structure conforme habituelle et de la distance $d$ induite par la norme euclidienne. Pour $y$ dans $S^2$ et $0 < \varepsilon < 2$, nous notons $B(y, \varepsilon)$ le disque de $S^2$ de centre $y$ et de rayon $\varepsilon$; soit $C(y, \varepsilon)$ son bord. Si $y$ est un point de $S^2$, notons $\tilde{y}$ son antipode.

Nous utiliserons les deux faits suivant:

(A) Si $H$ est un domaine simplement connexe de la sphère $S^2$ dont le complémentaire est localement connexe et contient plus d'un point, il y a une fonction continue de $B$ dans $S^2$ dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme sur $H$. De plus, le Théorème (2.2) de [18] s'applique encore dans ce cas.

(B) Soit $\mathscr{A}$ le sous-ensemble de $\mathscr{C}(B, S^2)$ formé des fonctions $h$ vérifiant

(i) la restriction de $h$ à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme,
(ii) l'intérieur de $S^2\backslash h(B)$ n'est pas vide,
(iii) $h(0) = p_0$,
(iv) $h'(0) > 0$ (i.e., un multiple positif d'un vecteur fixé du plan tangent à $S^2$ en $p_0$).

Alors, $\mathscr{A}$ est un rétracte absolu de voisinage.

(B) résulte du fait que, comme les ensembles $Z_i$ de la section précédente, $\mathscr{A}$ est localement homéomorphe à $\mathscr{A}_0(B, \mathbf{C})$.

Nous notons $N_1$ le sous-ensemble fermé homéomorphe à $\overset{\circ}{N}$ de $\mathscr{D}^\circ(N) = \mathscr{R}^\circ(N)$ formé des rétractions constantes. Soit $\mathscr{H} = \mathscr{R}^\circ(N)\backslash N_1$ et soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des rétractions $r$ de $\mathscr{R}^\circ(N)$ telles que l'intérieur de $\mathrm{im}(r)$ soit non vide.

**Lemme 9.** *$\mathscr{G}$ est ouvert dans $\mathscr{R}^\circ(N)$.*

*Démonstration.* Soit $r$ un élément de $\mathscr{G}$. Prenons des disques $D_1$, $D_2$, $D_3$ de façon que

$$D_1 \subset \overset{\circ}{D}_2 \subset D_2 \subset \overset{\circ}{D}_3 \subset D_3 \subset \operatorname{im}(r).$$

Soit $C$ le bord de $D_2$. Toute rétraction $r'$ assez proche de $r$ vérifie

($\alpha$) $r'(D_2) \subset D_3$ et $r'(C) \subset D_3 \backslash D_1$,

($\beta$) $1_C = r|C$ est homotope à $r'|C$ dans $D_3 \backslash D_1$.

Si, pour une telle $r'$, $\operatorname{im}(r')$ ne contenait pas un point $b$ de $D_1$, alors, puisque $r'|C$ est inessentielle dans $r'(D_2)$, $C$ serait déformable en un point dans $D_3 \backslash \{b\}$, ce qui est faux. $\mathscr{G}$ contient donc toutes les rétractions vérifiant ($\alpha$) et ($\beta$), donc est un voisinage de $r$.

**Lemme 10.** *$\mathscr{G}$ est un rétracte absolu de voisinage.*

*Démonstration.* Soient $X$ un espace métrique, $A$ un fermé de $X$ et $f: A \to \mathscr{G}$ une fonction continue. Compte-tenu de ($A$) et ($B$), l'argument utilisé aux §§3 et 4 pour prouver le Lemme 3 peut être appliqué à la fonction $f$ pour montrer que cette fonction vérifie l'hypothèse du Lemme 2. Par suite, $f$ peut se prolonger à un voisinage ouvert de $A$ dans $X$ et, puisque $\mathscr{G}$ est ouvert, nous pouvons supposer que ce prolongement est à valeurs dans $\mathscr{G}$, d'où le résultat.

**Lemme 11.** *Il existe une homotopie $\Gamma: \mathscr{R}^\circ(N) \times I \to \mathscr{R}^\circ(N)$ vérifiant*

(i) $\Gamma_0 = \mathrm{id}$,

(ii) *Si $r$ appartient à $N_1$, $\Gamma_t(r) = r$ quel que soit $t$,*

(iii) *Pour $t > 0$, $\Gamma_t(\mathscr{H})$ est contenu dans $\mathscr{G}$.*

*Démonstration.* Pour $r$ dans $\mathscr{H}$, soit $h_r$ l'unique fonction continue de $B$ dans $S^2$ dont la restriction à $\overset{\circ}{B}$ est une représentation conforme sur $S^2 \backslash \operatorname{im}(r)$ et qui vérifie $h(0) = p_0$ et $h'(0) > 0$. D'après (A) et le Théorème (2.2) de [18], la fonction $h: \mathscr{H} \to \mathscr{C}(B, S^2)$ est continue.

Fixons un point $x_0$ de $\partial B$. Pour $0 < u \leq 1$, soit $E(u)$ le disque de diamètre $u$ contenu dans $B$ et tangent à $\partial B$ en $x_0$; soit $K(u)$ le bord de $E(u)$. Pour $u = 0$, posons $E(0) = \{x_0\}$. Toute droite $L$ passant par $x_0$ qui n'est pas tangente à $B$ coupe $K(u)$ en un unique point distinct de $x_0$, soit $e_L(u)$, ou simplement $e(u)$.

Soit $T$ le sous-ensemble de $I \times I \times I$ formé des points $(a, b, c)$ tels que ou bien $a = b = c = 0$, ou bien $0 < a < b < c < 1$. Pour $(a, b, c)$ dans $T$, soit $\nu(a, b, c)$ la fonction de $B$ sur $B$ définie comme suit:

Si $a = b = c = 0$, $\nu(a, b, c) = \mathrm{id}$.

Sinon, $\nu(a, b, c)$ est l'identité sur $E(a)$ et hors de $\overset{\circ}{E}(c)$, envoie $K(b)$ sur le point $x_0$ et, pour toute droite $L$ passant par $x_0$, est linéaire sur les segments $[e(a), e(b)]$ et $[e(b), e(c)]$.

Il est clair que $\nu$ dépend continuement du point $(a, b, c)$ de $T$.

Pour tout $r$ dans $\mathscr{H}$, soit $\omega(r)$ la borne supérieure des nombres $u$ vérifiant

(1) $h_r(E(u)) \subset \overset{\circ}{N}$,

(2) $\delta(h_r(E(u))) < \delta(\operatorname{im}(r))$.

Alors, $\omega(r) > 0$ et l'on constate facilement que la fonction $\omega: \mathscr{H} \to ]0, 1]$ est semi-continue inférieurement. Nous pouvons donc trouver [6, p. 171] une fonction continue $\theta: \mathscr{H} \to ]0, 1[$ telle que

(3) $0 < \theta(r) < \omega(r)$ pour tout $r$ dans $\mathscr{H}$.

Posant $\nu(r, t) = \nu(t\theta(r)/3, t\theta(r)/2, t\theta(r))$, définissons $\Gamma$ comme suit: Si $r \in N_1$, $\Gamma(r, t) = r$ quel que soit $t$. Si $r \in \mathscr{H}$,

$$\Gamma(r, t)(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \notin h_r(E(t\theta(r))), \\ h_r \circ \nu(r, t) \circ h_r^{-1}(z) & \text{si } z \in h_r(E(t\theta(r)/2)), \\ r \circ h_r \circ \nu(r, t) \circ h_r^{-1}(z) & \text{si } z \in h_r(E(t\theta(r)) \setminus \mathring{E}(t\theta(r)/2)). \end{cases}$$

Cette définition a un sens car $\nu(r, t)$ est l'identité sur $K(t\theta(r))$ et, quand $z$ appartient à $h_r(K(t\theta(r)/2))$, $\nu(r, t) \circ h_r^{-1}(z) = x_0$, donc les deux formules possibles domment alors $\Gamma(r, t)(z) = h_r(x_0) = r(h_r(x_0))$. $\Gamma(r, t)$ est donc une fonction continue sur $N$. Comme on le vérifie facilement, $\Gamma(r, 0) = r$ et, pour $r$ dans $\mathscr{H}$ et $t > 0$, $\Gamma(r, t)$ est une rétraction de $N$ sur $\mathrm{im}(r) \cup h_r(E(t\theta(r)/3))$; ce dernier ensemble a un intérieur non vide et est contenu dans $\mathring{N}$ d'après (3) et (1), donc $\Gamma(r, t)$ est un élément de $\mathscr{G}$.

La continuité de $\Gamma$ en un point $(r, t)$ avec $r$ dans $\mathscr{H}$ résulte de la continuité des fonctions $h$, $\nu$ et $\theta$. La continuité de $\Gamma$ en un point $(r_0, t_0)$ avec $r_0$ dans $N_1$ résulte du fait que, pour $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$, ou bien $\Gamma(r, t) = r$, ou bien $\Gamma(r, t)$ coïncide avec $r$ hors de l'ensemble $h_r(E(t\theta(r)))$, dont le diamètre est inférieur à $\delta(\mathrm{im}(r))$ d'après (3) et (2), et envoie cet ensemble dans $\mathrm{im}(r) \cup h_r(E(t\theta(r)))$.

Avant de continuer, notons deux propriétés de la fonction $\gamma = \Gamma_1$ qui nous seront utiles dans la suite

(C) Il existe une fonction continue $\alpha$ de $\mathscr{R}^\circ(N)$ dans $\mathring{N}$ vérifiant

(i) $\alpha(r) \in \mathrm{im}(\gamma(r))$ quel que soit $r$,

(ii) si $r$ appartient à $\mathscr{H}$, $\alpha(r)$ est contenu dans l'intérieur de $\mathrm{im}(\gamma(r))$.

Il suffit de prendre pour $\alpha(r)$ l'image de $r$ si $r$ est dans $N_1$ et l'image par $h_r$ du centre du disque $E(\theta(r)/3)$ dans le cas contraire.

(D) Il existe une fonction continue $\xi: \mathscr{R}^\circ(N) \to \mathscr{C}(S^2)$ vérifiant

(i) $\xi_r(\mathrm{im}(\gamma(r)) = \mathrm{im}(r)$,

(ii) la restriction de $\xi_r$ à $S^2 \setminus \mathrm{im}(\gamma(r))$ est un homéomorphisme de cet ensemble sur $S^2 \setminus \mathrm{im}(r)$.

$\xi$ peut se construire comme suit: Pour $t > 0$, soit $\sigma(t)$ la fonction de $B$ sur $B$ qui envoie $E(t/3)$ sur le point $x_0$, est l'identité hors de $\mathring{E}(t)$ et, pour toute droite $L$ passant par $x_0$, envoie le segment $[e(t), e(t/3)]$ linéairement sur le segment $[e(t), x_0]$; $\sigma$ dépend continuement de $t$. La fonction $\xi$ peut alors être définie comme suit: Si $r \in N_1$, $\xi_r = \mathrm{id}$. Si $r \in \mathscr{H}$,

$$\xi_r(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \notin h_r(E(\theta(r))), \\ h_r \circ \sigma(\theta(r)) \circ h_r^{-1}(z) & \text{si } z \in h_r(E(\theta(r))). \end{cases}$$

Que cette définition a un sens et fournit une fonction continue de $\mathscr{R}^\circ(N)$ dans $\mathscr{C}(S^2)$ se démontre comme pour $\Gamma$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les conditions (i) et (ii).

**Lemme 12.** *$\mathscr{H}$ est une $l^2$-variété.*

*Démonstration.* Soit $\Gamma'\colon \mathscr{H} \times I \to \mathscr{R}^\circ(N)$ la restriction de $\Gamma$. Alors (i) $\Gamma'_0 = \mathrm{id}$, et (iii$'$) pour $t > 0$, $\Gamma'_t(\mathscr{H})$ est contenu dans $\mathscr{G}$. Puisque $\mathscr{G}$ est un rétracte absolu de voisinage, cela entraîne, comme nous l'avons remarqué après le Lemme 1, que $\mathscr{H}$ en est un aussi. La démonstration du Lemme 5 quand $N$ n'est pas un disque peut-être utilisée pour montrer que tout point de $\mathscr{H}$ a un voisinage ouvert divisible par $l^2$. Puisque $\mathscr{H}$ est ouvert dans $\mathscr{R}^\circ(N)$, il est séparable et topologiquement complet. Comme nous l'avons rappelé plus haut, cela entraîne que $\mathscr{H}$ est une $l^2$-variété.

**Lemme 13.** *Il existe une fonction continue $\psi\colon \mathscr{R}^\circ(N) \to \mathscr{C}(B, S^2)$ telle que, pour tout $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$, la restriction de $\psi_r$ à $\mathring{B}$ soit un homéomorphisme de $\mathring{B}$ sur $S^2\backslash \mathrm{im}(r)$ vérifiant $\psi_r(0) = p_0$.*

*Démonstration.* Nous avons besoin d'une construction auxilaire. Etant donnés un point $y$ de $S^2$ et des nombres $0 < a < b < 2$, soit $\mu(y, a, b)$ la fonction de $S^2$ sur $S^2$ définie comme suit: $\mu = \mu(y, a, b)$ est l'identité hors de $B(y, b)$ et en $y$, contracte $B(y, a)$ sur le point $y$ et, pour tout demi-grand cercle $L$ reliant $y$ à son antipode $\tilde{y}$, envoie $L \cap (B(y, b)\backslash \mathring{B}(y, a))$ sur $L \cap B(y, b)$ linéairement (au sens de la longueur du sous-arc de $L$). Il est clair que $\mu(y, a, b)$ dépend continuement du triple $(y, a, b)$.

Posons, pour $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$,

$$\varepsilon_1(r) = \tfrac{1}{4} d(\alpha(r), D) > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2(r) = \tfrac{1}{2} d(\alpha(r), D)$$

(rappelons que $D = S^2\backslash \mathring{N}$, $\gamma = \Gamma_1$ et que $\alpha$ est introduite dans (C)). Définissons une fonction continue $\lambda$ de $\mathscr{R}^\circ(N)$ dans $\mathscr{C}(S^2)$ par

$$\lambda_r = \mu(\alpha(r), \varepsilon_1(r), \varepsilon_2(r)).$$

Pour $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$, posons $G_r = S^2\backslash \mathrm{im}(\gamma(r))$, $H_r = \lambda_r^{-1}(G_r)$ et $F_r = S^2\backslash H_r = \lambda_r^{-1}(\mathrm{im}(\gamma(r)))$. Alors $\lambda_r$ induit un homéomorphisme de $H_r$ sur $G_r$. $F_r$ est un continu localement connexe car, si $\mathrm{im}(r)$ est réduite à un point, c'est le disque $B(\alpha(r), \varepsilon_1(r))$, sinon, ce disque est contenu dans l'intérieur de $F_r$, donc l'espace obtenu en l'identifiant à un point, qui est $\mathrm{im}(\gamma(r))$ est homéomorphe à $F_r$. Puisque $F_r$ est localement connexe, la frontière de $H_r$ l'est aussi [19, p. 106], donc il y a une unique fonction continue $k_r$ de $B$ dans $S^2$ dont la restriction à $\mathring{B}$ est une représentation conforme sur $H_r$ et qui vérifie $k_r(0) = p_0$ et $k_r'(0) > 0$.

**Affirmation.** $\lambda \circ k : \mathscr{R}^\circ(N) \to \mathscr{C}(B, S^2)$ *est continue.*

(La fonction $k$, au contraire, est discontinue aux points de $N_1$.)

Une fois cette affirmation démontrée, la fonction $\psi$ cherchée peut être définie par $\psi_r = \xi_r \circ \lambda_r \circ k_r$, où $\xi$ est comme dans (D).

Pour vérifier cette affirmation, nous avons besoin de quelques définitions et résultats de la théorie des représentations conformes. Soient $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ des domaines simplement connexes de $S^2$ contenant un disque fixé de centre $p_0$. Soit $H$ l'ensemble (ouvert) des points $p$ de $S^2$ pour lesquels il existe un voisinage $V$ de $p$ et un entier $n_0$ tels que $H_n$ contienne $V$ pour $n \geq n_0$. Le noyau de la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ (par rapport à $p_0$) est la composante connexe de $H$ qui contient $p_0$. On dit que la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers un domaine $H_0$ au sens de Carathéodory si toute sous-suite de $\{H_n\}$ a pour noyau $H_0$.

Si $H$ est un domaine simplement connexe de $S^2$ contenant $p_0$, une coupure de $H$ est un arc $A$ dont les extrémités appartiennent à la frontière de $H$ et dont l'intérieur est contenu dans $H$; $A$ décompose $H$ en deux composantes et, s'il ne contient pas $p_0$, nous notons $\delta(H; A)$ le diamètre de la composante de $H \backslash A$ qui ne contient pas $p_0$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\eta(H, \varepsilon)$ la borne supérieure des nombres $\delta(H; A)$, où $A$ parcourt l'ensemble $\mathscr{Q}(H, \varepsilon)$ des coupures de $H$ de diamètre $< \varepsilon$ ne contenant pas $p_0$.

Pour $n \geq 0$, soit $H_n$ un domaine simplement connexe borné de $S^2$ (i.e., l'intérieur de $S^2 \backslash H_n$ n'est pas vide). Supposons que les $H_n$ contiennent un disque fixé de centre $p_0$, et soit $k_n$ l'unique représentation conforme de $\mathring{B}$ sur $H_n$ telle que $k_n(0) = p_0$ et $k_n'(0) > 0$. Alors

(E) La suite $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers $k_0$ sur tout compact de $\mathring{B}$ si, et seulement si, la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers $H_0$ au sens de Carathéodory [12, Théorème 2.1, p. 33].

Supposons en outre les frontières des $H_n$ localement connexes, de sorte que $k_n$ se prolonge continuement à $B$. Alors

(F) La suite $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers $k_0$ sur $B$ si, et seulement si, la suite $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers $H_0$ au sens de Fréchet, i.e., vérifie les deux conditions suivantes:

($*_1$) $\{H_n\}$ converge vers $H_0$ au sens de Carathéodory,

($*_2$) $\lim_{n\to\infty,\, \varepsilon \to 0} \eta(H_n, \varepsilon) = 0$.

C'est une partie du Théorème 2.2 de [18].

*Preuve de l'affirmation.* Soit $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ une suite d'éléments de $\mathscr{R}^\circ(N)$ convergeant vers $r_0$. Il nous faut prouver que $\lambda_{r_n} \circ k_{r_n}$ tend vers $\lambda_{r_0} \circ k_{r_0}$. Pour simplifier les notations, nous écrirons $H_n$, $\lambda_n$, etc., au lieu de $H_{r_n}$, $\lambda_{r_n}$, etc. Commençons par quelques observations

(a) La suite $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers $G_0$ au sens de Fréchet.

Cela résulte du Théorème 2.2(d) de [18] si $\operatorname{im}(r_0)$ contient plus d'un point, c'est trivial dans le cas contraire.

(b) La suite $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers $H_0$ au sens de Carathéodory.

Ceci revient à vérifier qu'un point $p$ de $S^2$ est dans $F_0$ si, et seulement si, tout voisinage de $p$ rencontre une infinité d'ensembles $F_n$. Si $V$ est un voisinage compact de $p$ tel que $V \cap F_{n_k} \neq \emptyset$ pour une infinité d'indices $n_k$, soit, pour tout $k$, $x_k$ un point de $V \cap F_{n_k}$. Nous pouvons supposer que $x_k$ tend vers un point $x_0$ de $V$. Puisque $\lambda_n$ tend vers $\lambda_0$, $\lambda_{n_k}(x_k)$ tend vers $\lambda_0(x_0)$. Puisque $r_n$ tend vers $r_0$ et que $\lambda_{n_k}(x_k)$ appartient à $\operatorname{im}\gamma(r_{n_k})$, $\lambda_0(x_0)$ appartient à $\operatorname{im}\gamma(r_0)$, donc $\lambda_0(V) \cap \operatorname{im}\gamma(r_0) \neq \emptyset$. Si cela est vrai pour tout voisinage compact de $p$, $\lambda_0(p)$ appartient à $\operatorname{im}\gamma(r_0)$, donc $p$ appartient à $F_0$. Inversement, soit $p$ un point de $F_0$. Si $p$ est dans $B(\alpha(r_0), \varepsilon_1(r_0))$, il est, d'après la continuité de $\alpha$ et $\varepsilon_1$, dans la limite supérieure des ensembles $B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n)) \subset F_n$. Sinon, pour tout voisinage assez petit $V$ de $p$, $\lambda_0(V)$ est un voisinage de $\lambda_0(p) = \gamma(r_0)(\lambda_0(p))$ et $V = \lambda_0^{-1}\lambda_0(V)$. Mais $\gamma(r_n)(\lambda_0(p))$ tend vers $\gamma(r_0)(\lambda_0(p))$, donc $\lambda_0(V)$ contient presque tous les points $\gamma(r_n)(\lambda_0(p))$ et $V$ contient presque tous les $\lambda_n^{-1}\gamma(r_n)(\lambda_0(p)) \subset F_n$. (Car, si $V$ est assez petit pour que $V \cap B(\alpha(r_0), \varepsilon_1(r_0)) = \emptyset$, alors $\alpha(r_n)$ n'appartient pas à $\lambda_0(V)$ pour $n$ assez grand, donc $\lambda_n$ induit un homéomorphisme de $\lambda_n^{-1}(\lambda_0(V))$ sur $\lambda_0(V)$, et $\lambda_n^{-1}|\lambda_0(V)$ converge uniformément vers $\lambda_0^{-1}|\lambda_0(V)$ d'après la définition des $\lambda_r$.)

(c) Les fonctions $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ forment une famille uniformément équicontinue.

C'est clair puisque $\{\lambda_n\}$ converge uniformément vers $\lambda_0$.

(d) Pour tout $a > 0$, il existe un $n_0$ tel que, pour $n \geq n_0$, $\lambda_n(B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n)))$ soit contenu dans $B(\alpha(r_0), a)$ et que les restrictions des fonctions $\lambda_n^{-1}$, $n \geq n_0$, à $S^2 \backslash \overset{\circ}{B}(\alpha(r_0), a)$ forment une famille uniformément équicontinue.

La vérification, qui utilise la continuité de $\alpha$ et de $\varepsilon_1$ et la définition géométrique de la fonction $\lambda$, est laissée au lecteur.

(e) Si $\operatorname{im}(r_n)$ n'est pas réduite à un point, $\lambda_n$ établit une bijection entre les coupures de $H_n$ ne contenant pas $p_0$ et les coupures de $G_n$ ne contenant pas $p_0$.

Car, dans ce cas, $B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n))$ est contenu dans l'intérieur de $F_n$, donc la restriction de $\lambda_n$ à la fermeture de $H_n$ est un homéomorphisme de $\overline{H}_n$ sur $\overline{G}_n$, et $\lambda_n(p_0) = p_0$.

Distinguons deux cas:

1*er cas.* $\operatorname{im}(r_0)$ contient plus d'un point. Nous allons montrer qu'alors $\{k_n\}$ tend vers $k_0$. D'après (b), la suite $\{H_n\}$ vérifie $(*_1)$, donc, d'après (F), il suffit de montrer qu'elle vérifie aussi $(*_2)$.

Puisque $r_0$ appartient à $\mathscr{H}$, $\operatorname{im}(\gamma(r_0))$ contient un disque $B(\alpha(r_0), a)$ d'après (C); soit $0 < a' < a$.

Quitte à supprimer un nombre fini de termes de la suite, nous pouvons supposer que $r_n$ appartient à $\mathscr{H}$ pour tout $n$ et, d'après (d), que

(1) $\lambda_n(B(\alpha(r_n), \varepsilon_1(r_n))) \subset B(\alpha(r_0), a')$ quel que soit $n$,

(2) les fonctions $\lambda_n^{-1}|S^2\backslash B(\alpha(r_0), a')$ forment une famille uniformément équicontinue.

La continuité de $\alpha$ et de $\gamma$ permet de supposer aussi, quitte à supprimer un nombre fini de termes, que nous avons

(3) $B(\alpha(r_0), a') \subset \mathrm{im}(\gamma(r_n))$ quel que soit $n$.

D'après (e), $\lambda_n$ établit une bijection, encore notée $\lambda_n$, entre l'ensemble des coupures de $H_n$ ne contenant pas $p_0$ et l'ensemble des coupures de $G_n$ ne contenant pas $p_0$. D'après (c), $\lambda_n$ envoie l'ensemble $\mathscr{C}(H_n, \varepsilon)$ dans un ensemble $\mathscr{C}(G_n, \varepsilon')$, où $\varepsilon'$ ne dépend pas de $n \geq 1$ et tend vers 0 avec $\varepsilon$. D'après (a), $\eta(G_n, \varepsilon')$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini et $\varepsilon$ vers 0. Puisque, pour $A$ dans $\mathscr{C}(H_n, \varepsilon)$, $\lambda_n$ envoie la composante de $H_n\backslash A$ qui ne contient pas $p_0$ sur la composante de $G_n\backslash\lambda_n(A)$ qui ne contient pas $p_0$ et que, d'apres (3), cette composante est disjointe de $B(\alpha(r_0), a')$, il résulte de (2) que $\eta(H_n, \varepsilon)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini et $\varepsilon$ vers 0.

*2ème cas.* $r_0$ appartient à $N_1$; alors $\gamma(r_0) = r_0$. Etant donné un $\delta > 0$, soit $K = S^2\backslash\lambda_0^{-1}(\mathring{B}(\alpha(r_0), \delta))$; c'est un compact contenu dans $H_0$. Soit $P$ un compact de $\mathring{B}$ dont l'intérieur contient $k_0^{-1}(K)$. Puisque $k_n|\mathring{B}$ est une représentation conforme et que la suite $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $k_0$ sur tout compact de $\mathring{B}$ (d'après (b) et (E)), nous pouvons trouver un entier $n_0$ tel que, pour $n \geq n_0$, $k_n(P)$ contienne $K$ et que $d(\lambda_n k_n(w), \lambda_0 k_0(w)) < \delta$ pour tout $w$ dans P. Alors, si $n \geq n_0$ et si $w$ est un point de $B$ n'appartenant pas à $P$, $k_n(w)$ n'appartient pas à $K$, de même que $k_0(w)$, donc $\lambda_n k_n(w)$ et $\lambda_0 k_0(w)$ sont tous deux dans $B(\alpha(r_0), \delta)$, d'où $d(\lambda_n k_n(w), \lambda_0 k_0(w)) < 2\delta$. Par suite, $d(\lambda_n \circ k_n, \lambda_0 \circ k_0) < 2\delta$ pour $n \geq n_0$, d'où le résultat dans ce cas.

**Lemme 14.** *Il existe une homotopie* $\varphi\colon \mathscr{R}^\circ(N) \times I \to \mathscr{R}^\circ(N)$ *vérifiant*

(i) $\varphi_0 = \mathrm{id}$,

(ii) *pour* $t > 0$, *la fermeture de* $\varphi_t(\mathscr{R}^\circ(N))$ *est contenue dans* $\mathscr{H}$.

*Démonstration.* Soit $\psi\colon \mathscr{R}^\circ(N) \to \mathscr{C}(B, S^2)$ la fonction construite à l'étape précédente. Reprenons les notations de la démonstration du Lemme 11. Si $x_0$ est le point fixé de $\partial B$, posons, pour $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$, $\beta(r) = \psi_r(x_0)$. Pour $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$, soit $\sigma(r)$ la borne supérieure des nombres $u$ vérifiant

$$(1) \qquad \psi_r(E(u)) \subset \mathring{N}.$$

Puisque la fonction $\psi$ vérifie $\psi_r(0) = p_0$ quel que soit $r$, $\psi_r(E(1))$ rencontre $\mathring{D}$, d'où

$$(2) \qquad \sigma(r) < 1 \quad \text{quel que soit } r.$$

Pour $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$ et $0 < t \leq 1$, soit $\tau(r, t)$ la borne inférieure des nombres $u$ vérifiant

$$(3) \qquad \delta(\psi_r(E(u))) > \tfrac{t}{2} d(\beta(r), D).$$

Nous convenons que $\tau(r, 0) = 0$, de sorte que

(4) $$\tau(r, t) = 0 \quad \text{si, et seulement si, } t = 0.$$

Il est facile de voir que $\sigma$ est semi-continue inférieurement sur $\mathscr{R}^\circ(N)$ et $\tau$ semi-continue supérieurement sur $\mathscr{R}^\circ(N) \times I$. De plus, si $u \geq \sigma(r)$, $\psi_r(E(u))$ rencontre $D$, donc $\delta(\psi_r(E(u))) \geq d(\beta(r), D)$, d'où immédiatement $\tau(r, t) < \sigma(r)$. Nous pouvons donc trouver [6, p. 171] une fonction continue $\zeta: \mathscr{R}^\circ(N) \times I \to I$ vérifiant

(5) $$\tau(r, t) < \zeta(r, t) < \sigma(r) \quad \text{quels que soient } r \text{ et } t.$$

Pour $n \geq 1$, soit $W_n$ l'ensemble des points $(r, t)$ de $\mathscr{R}^\circ(N) \times I$ pour lesquels $\tau(r, t) < 1/n$; c'est un ouvert de $\mathscr{R}^\circ(N) \times I$ et, d'après (4), $\mathscr{R}^\circ(N) \times \{0\} = \bigcap_{n=1}^\infty W_n$. Nous pouvons donc trouver des ouverts $V_n$ de $\mathscr{R}^\circ(N) \times I$ vérifiant

(6) $$\overline{V}_{n+1} \subset V_n \quad \text{pour tout } n,$$

(7) $$V_n \subset W_n \quad \text{pour tout } n,$$

(8) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = \mathscr{R}^\circ(N) \times \{0\}.$$

Il est alors facile, à l'aide du lemme d'Urysohn, de construire une fonction continue $\chi: \mathscr{R}^\circ(N) \times I \to I$ de façon que

$$\chi(r, 0) = 0 \quad \text{pour tout } r,$$
$$\chi(r, t) = 1 \quad \text{si } (r, t) \notin V_2,$$
$$\frac{1}{n} \leq \chi(r, t) \leq \frac{1}{n-1} \quad \text{si } (r, t) \in \overline{V}_n \backslash V_{n+1}, \ n \geq 2.$$

Alors $\chi$ vérifie

(9) $$\tau(r, t) < \chi(r, t) \quad \text{si } t > 0.$$

En effet, si $(r, t) \in \overline{V}_n \backslash V_{n+1}$, $n \geq 2$, $\tau(r, t) < \frac{1}{n} \leq \chi(r, t)$ d'après (7), et si $(r, t) \notin V_2$, $\chi(r, t) = 1 > \sigma(r) > \tau(r, t)$.

Posons $\varepsilon_3(r, t) = \min(\zeta(r, t), \chi(r, t))$. C'est une fonction continue de $\mathscr{R}^\circ(N) \times I$ dans $I$ qui vérifie, d'après (5), (9) et le choix de $\chi$,

(10) $$\tau(r, t) < \varepsilon_3(r, t) < \sigma(r) < 1 \quad \text{si } t > 0,$$

(11) $$\varepsilon_3(r, 0) = 0.$$

Puisque $\tau$ est semi-continue supérieurement, la relation (10) nous permet de trouver des fonctions continues $\varepsilon_1, \varepsilon_2: \mathscr{R}^\circ(N) \times ]0, 1] \to I$ vérifiant

(12) $$0 < \tau(r, t) < \varepsilon_1(r, t) < \varepsilon_2(r, t) < \varepsilon_3(r, t) \quad \text{pour } t > 0.$$

Il résulte de (11), (12) et de la continuité de $\varepsilon_3$ que, si nous prolongeons $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ à $\mathscr{R}^\circ(N) \times I$ en posant $\varepsilon_1(r, 0) = \varepsilon_2(r, 0) = 0$, les fonctions ainsi obtenues sont continues. Alors, quelque soit $(r, t)$, $(\varepsilon_1(r, t), \varepsilon_2(r, t), \varepsilon_3(r, t))$ est un point de $T$ et nous pouvons poser $\nu(r, t) = \nu(\varepsilon_1(r, t), \varepsilon_2(r, t), \varepsilon_3(r, t))$. Définissons alors $\varphi$ par

$$\varphi(r, t)(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \notin \psi_r(E(\varepsilon_3(r, t))), \\ \psi_r \circ \nu(r, t) \circ \psi_r^{-1}(z) & \text{si } z \in \psi_r(E(\varepsilon_2(r, t))), \\ r \circ \psi_r \circ \nu(r, t) \circ \psi_r^{-1}(z) & \text{si } z \in \psi_r(E(\varepsilon_3(r, t)) \backslash \overset{\circ}{E}(\varepsilon_2(r, t))). \end{cases}$$

Comme dans le cas de $\Gamma$, on vérifie que cette définition a un sens et, puisque les fonctions $\psi$, $\nu$ et $\varepsilon_j$ sont continues, détermine une fonction continue de $\mathscr{R}^\circ(N) \times I$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$ telle que $\varphi_0 = \mathrm{id}$ et que, pour $t > 0$, $\varphi(r, t)$ ait pour image $\mathrm{im}(r) \cup \psi_r(E(\varepsilon_1(r, t)))$, dont le diamètre est $> \frac{t}{2} d(\beta(r), D)$ d'après (12) et (3).

Supposons la condition (ii) en défaut. Alors, pour un certain $t > 0$, il y a une suite $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ de rétractions telle que $\{\varphi(r_n, t)\}$ converge vers $r_0 \in N_1$. Puisque $\mathrm{im}(r_0)$ est réduite à un point $m$, $\beta(r_n)$, qui appartient à $\mathrm{im}(r_n)$, tend vers $m$, donc $d(\beta(r_n), D)$ tend vers $d(m, D) > 0$; il y a donc un $\alpha > 0$ tel que $d(\beta(r_n), D) > \alpha$ quel que soit $n$, donc le diamètre de $\mathrm{im}(\varphi(r_n, t))$ est $\geq t\frac{\alpha}{2}$ pour tout $n$, ce qui est impossible puisque $\{\varphi(r_n, t)\}$ converge vers une fonction constante, d'où (ii).

Nous sommes maintenant enfin au bout de nos peines. En effet, les Lemmes 12 et 14 entraînent, comme nous l'avons rappelé après le Lemme 1, que $\mathscr{R}^\circ(N)$ est une $l^2$-variété, ce qui contient le Lemme 3 pour un disque. Le Lemme 4 est donc encore vrai dans ce cas et la démonstration du Lemme 5 montre que le sous-ensemble ouvert $\mathscr{K}$ de $Q(N)$ formé des rétractions non constantes est localement divisible par $l^2$, donc une $l^2$-variété. La déformation $\varphi$ construite au Lemme 14 a la propriété que, quels que soient $r$ dans $\mathscr{R}^\circ(N)$ et $t$ dans $I$, $\varphi(r, t)|\partial N = r|\partial N$. Cela permet de définir une homotopie $\overline{\varphi}\colon Q \times I \to Q$ par

$$\overline{\varphi}(\rho, t)(z) = \begin{cases} \rho(z) & \text{si } z \notin \overset{\circ}{N}, \\ \varphi(\rho|N, t)(z) & \text{si } z \in N. \end{cases}$$

Alors $\overline{\varphi}_0 = \mathrm{id}$ et la condition (ii) pour $\varphi$ entraîne que, pour $t > 0$, la fermeture de $\overline{\varphi}_t(Q)$ est contenue dans $\mathscr{K}$. Puisque $\mathscr{K}$ est une $l^2$-variété, $Q$ aussi, d'où le Lemme 5 dans ce cas.

## Bibliographie


1. V. N. Basmanov et A. G. Savchenko, *L'espace de Hilbert comme espace des rétractions d'un arc (en russe)*, Mat. Zametki **42** (1987), 94–100.
2. K. Borsuk, *Concerning the set of retractions*, Colloq. Math. **18** (1967), 197–201.
3. L. Boxer, *Retraction spaces and the homotopy metric*, Topology Appl. **11** (1980), 17–29.
4. R. Cauty, *Un théorème de sélection et l'espace des rétractions d'une surface*, Amer. J. Math. **97** (1975), 282–290.
5. T. A. Chapman, *The space of retractions of a compact Hilbert cube manifold is an A.N.R.*, Topology Proc. **2** (1977), 409–430.

6. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.
7. E. E. Floyd, *On the extension of homeomorphisms on the interior of a two cell*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 654–658.
8. R. Geoghegan, *On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions*. I, Topology **11** (1972), 159–177.
9. D. W. Henderson and R. M. Schori, *Topological classification of infinite dimensional manifolds by homotopy type*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 121–124.
10. S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, Mich., 1965.
11. R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.
12. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*. III, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
13. K. Sakai, *The space of retractions of a compact $Q$-manifold is an $l^2$-manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 421–424.
14. H. Toruńczyk, *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, Fund. Math. **86** (1974), 53–67.
15. ———, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, Fund. Math. **125** (1985), 89–93.
16. N. R. Wagner, *The space of retractions of the 2-sphere and the annulus*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 319–329.
17. ———, *The space of retractions of a 2-manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 609–614.
18. ———, *A continuity property with applications to the topology of 2-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 369–393.
19. G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1942.


Université de Paris VI, U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliqueés, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France